قسم الفيزياء كلية العلوم الدقيقة جامعة الشهيد حمه لخضر	2022/05/23	السنة الثانية ليسانس فيزياء 2021-2022

تصحيح إمتحان ميكانيك الكم

التمرين:

1. الدالة الموجية لجملة فيزيائية تكتب على الشكل

$$\psi\left(x,t\right)=T\left(t\right)\phi\left(x\right)$$

01pt

(ا) يمكن فصل الزمن عن الموضع في الدالة الموجية إذا كان مؤثر الطاقة لا يتعلق بالزمن.

(ب) معادلة شرودينغر تكتب

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t}=H\psi\left(x,t\right).$$

لدينا

$$\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}T\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\varphi\left(x\right)\ ,\ \frac{\partial^2\psi\left(x,t\right)}{\partial x^2}=T\left(t\right)\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}.$$

بالتعويض في معادلة شرودينغر نجد

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}T\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\varphi\left(x\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}T\left(t\right)\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}+V\left(x\right)T\left(t\right)\varphi\left(x\right).$$

بقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على $T\left(t\right)\varphi\left(x\right)$ نحصل على

$$i\hbar\frac{1}{T\left(t\right)}\frac{\mathrm{d}T\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\varphi\left(x\right)}\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}+V\left(x\right).$$

بما أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة لا يتعلق إلا بـ t و الطرف الأيمن لا يتعلق إلا بـ x، فإن هذه المساواة لن تكون صحيحة إلا إذا كان كلاهما مساو لثابت و ليكن E. إذن

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\varphi\left(x\right)}\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}+V\left(x\right)=E\Longrightarrow-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}+V\left(x\right)\varphi\left(x\right)=E\varphi\left(x\right)$$

02pts

$$\Longrightarrow\boxed{H\varphi\left(x\right)=E\varphi\left(x\right)}.$$

2. بصفة عامة هناك عدد من القيم لـ E لذلك سنعيد كتابة العبارة المذكورة أعلاه على الشكل:

$$H\phi_n(x)=E_n\phi_n(x)$$

(ا) نعم H مدرك، لأنه مؤثر ممثل لكمية فيزيائية. 02pts

(ب) تسمى هذه المعادلة بمعادلة القيم الذاتية لمؤثر الطاقة (الهاملتوني) H. 02pts

(ج) H مؤثر الطاقة (الهاملتوني)، $\phi_n(x)$ الدوال الذاتية، E_n القيم الذاتية. 02pts

(د) يمكن كتابة الدالة الموجية $\psi(x,t)$ بدلالة الدوال $\{\phi_n(x)\}$، لأن هذه الدوال هي الدوال الذاتية للمدرك H فهي إذن تشكل أساسا في فضاء هيلبرت. 02pts

(ه) الدالة $\phi_1(x)$ هي الدالة التي تصف هذه الجملة بعد القياس إذا وجدت الجملة بطاقة E_1. 02pts

3. إذا كانت الدالة $\phi_0(x)$ المرفقة بالقيمة E_0 معرفة كالتالي:

$$\phi_0(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2}$$

(ا) التحقق من شرط التنظيم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0^\star(x)\phi_0(x)\ dx = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha x^2}\ dx = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2} = 1.$$ 01pt

(ب) إذا كان مؤثر طاقة الكمون هو $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$، تعيين E_0:

$$H\phi_0(x) = E_0\phi_0(x)$$

$$H\phi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi_0(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\phi_0(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2\alpha + 4\alpha^2x^2\right) + \frac{1}{2}kx^2\right]\phi_0(x).$$

$$\Longrightarrow E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2\alpha + 4\alpha^2x^2\right) + \frac{1}{2}kx^2.$$ 02pts

(ج) حساب القيم المتوسطة:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0^\star(x)x\phi_0(x)\ dx = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-2\alpha x^2}\ dx = 0.$$ 02pts

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0^\star(x)p_x\phi_0(x)\ dx = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} -2\alpha xe^{-2\alpha x^2}\ dx = 0.$$ 02pts